**Devoir Maison—Etats quantique, intrication et applications**

**Exercice 1.1**: Permutation matrix Soit a ∈ {0, 1} et |0⟩, |1⟩, une base de calcul. Trouvez une unitaire 4 × 4 tel que : U : |a⟩ ⊗ |a⟩ → |a⟩ ⊗ |a¯⟩ (1) o`u ¯a denote l’operation NOT appliqu´e `a a

—------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Correction :**

La matrice de permutation que l'on cherche est une matrice unitaire U de taille 4x4 qui transforme le produit tensoriel de deux qubits dans la base de calcul {|0⟩, |1⟩} comme suit:

U: |a⟩ ⊗ |a⟩ → |a⟩ ⊗ |ā⟩

où ā représente l'opération NOT appliquée à a.

Nous pouvons écrire les qubits |a⟩ et |ā⟩ en termes de la base de calcul comme suit:

|a⟩ = a|0⟩ + (1-a)|1⟩

|ā⟩ = (1-a)|0⟩ + a|1⟩

Le produit tensoriel de ces deux qubits peut être écrit comme:

|a⟩ ⊗ |ā⟩ = a|0⟩ ⊗ (1-a)|0⟩ + a|0⟩ ⊗ a|1⟩ + (1-a)|1⟩ ⊗ (1-a)|0⟩ + (1-a)|1⟩ ⊗ a|1⟩

Nous pouvons donc définir une matrice unitaire U qui opère sur cet état de la façon suivante:

U = |00⟩⟨00| + |01⟩⟨11| + |10⟩⟨10| + |11⟩⟨01|

En termes de composantes, nous avons:

U =

[ 1 0 0 0 ]

[ 0 0 0 1 ]

[ 0 1 1 0 ]

[ 0 0 1 0 ]

On peut facilement vérifier que cette matrice unitaire satisfait la relation donnée:

U|a⟩ ⊗ |ā⟩ = U(a|00⟩ + (1-a)|11⟩) = a|00⟩ + (1-a)|01⟩ = |a⟩ ⊗ |ā⟩

Ainsi, U est bien la matrice de permutation unitaire recherchée.

**Exercice 1.2:** CNOT La porte CNOT est telle que : |x⟩ ⊗ |y⟩ → |x⟩ ⊗ |x ⊕ y⟩ (2) o`u ⊕ est la porte XOR. 1. Montrer que la porte CNOT peut ˆetre utilis´e pour copier un bit. 2. Montrer que le mˆeme processus ne fonctionne plus si le qubit x est une superposition quelconque α|0⟩ + β|1⟩. Ceci est une manifestation du fait qu’on peut effectuer une copie d’un bit classique mais pas d’un qubit en general (th´eor`eme de non-clonage quantique).

—------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Correction :**

1- Montrer que la porte CNOT peut être utilisée pour copier un bit

Supposons que nous ayons deux qubits, |a⟩ et |b⟩, tels que |a⟩ contient la valeur du bit que nous voulons copier et |b⟩ est initialement à l'état |0⟩. Nous pouvons alors utiliser la porte CNOT pour copier la valeur de |a⟩ dans |b⟩ en effectuant l'opération suivante:

CNOT: |a⟩ ⊗ |0⟩ → |a⟩ ⊗ |a⟩

Cela copie la valeur de |a⟩ dans |b⟩, car la sortie est maintenant |a⟩ ⊗ |a⟩. Ainsi, la porte CNOT peut être utilisée pour copier un bit.

**2-** Montrer que le même processus ne fonctionne plus si le qubit x est une superposition quelconque α|0⟩ + β|1⟩.

Si le qubit |x⟩ est dans un état de superposition α|0⟩ + β|1⟩, alors nous ne pouvons pas utiliser la porte CNOT pour copier la valeur de |x⟩ dans un autre qubit. En effet, supposons que nous ayons un deuxième qubit |y⟩ initialisé à |0⟩ et que nous essayions d'utiliser la porte CNOT sur |x⟩ ⊗ |y⟩:

CNOT: (α|0⟩ + β|1⟩) ⊗ |0⟩ → α|0⟩ ⊗ |0⟩ + β|1⟩ ⊗ |1⟩

Nous voyons que la porte CNOT ne copie pas correctement la valeur de |x⟩ dans |y⟩. Au lieu de cela, nous obtenons un état de superposition des deux qubits, qui est différent de l'état de départ. Cela est dû au fait que la mesure d'un qubit en superposition entraîne une réduction de l'état quantique global, et donc la mesure de l'état |x⟩ a un effet sur l'état |y⟩, ce qui empêche la copie exacte de l'état. Ce phénomène est connu sous le nom de théorème de non-clonage quantique.

**Exercice 1.3**: Bases 1. Déterminer les états obtenus (états de Bell) en injectant dans la porte logique en Fig 1 les quatre états de la base de calcul `a deux qubits : |00⟩, |01⟩, |10⟩, |11⟩ (On notera |β00⟩, |β10⟩, |β01⟩, |β11⟩ les états de Bell correspondants obtenus). 2. Montrer que ces états sont orthogonaux 3. Prenons l’état β01 ; on effectue une mesure sur le premier qubit. Quelle est la probabilité d’obtenir 0 ? On obtient effectivement 0 et on mesure maintenant le deuxième bit. Quelle est la probabilité d’obtenir 0 ? 4. Répondre aux même questions en partant de l’état |ϕ⟩ = 1 2 (|00⟩ + |01⟩ + |10⟩ + |11⟩)

**Correction :**

1- En injectant les quatre états de la base de calcul à deux qubits dans la porte logique de la figure 1, on obtient les états de Bell suivants :

|β00⟩ = 1/√2 (|00⟩ + |11⟩)

|β01⟩ = 1/√2 (|01⟩ + |10⟩)

|β10⟩ = 1/√2 (|00⟩ - |11⟩)

|β11⟩ = 1/√2 (|01⟩ - |10⟩)

2- Pour montrer que ces états de Bell sont orthogonaux, il faut vérifier que leur produit scalaire est nul. On a :

⟨βij|βkl⟩ = 1/2 ⟨ij+kl|ij+kl⟩

où i, j, k et l sont des bits (0 ou 1). Si les états βij et βkl sont orthogonaux, leur produit scalaire doit être nul. On peut le vérifier en développant le produit scalaire :

⟨βij|βkl⟩ = 1/2 (⟨ij|ij⟩ + ⟨ij|kl⟩ + ⟨kl|ij⟩ + ⟨kl|kl⟩)

On remarque que les deux termes du milieu sont égaux (par commutativité du produit scalaire), et que les termes diagonaux (i.e. ⟨ij|ij⟩ et ⟨kl|kl⟩) valent 1 car les états de base {|00⟩, |01⟩, |10⟩, |11⟩} sont normés. Ainsi :

⟨βij|βkl⟩ = 1/2 (2δik δjl + 2δil δjk) = δik δjl + δil δjk

où δ est le symbole de Kronecker. On peut alors vérifier que si i≠k ou j≠l, le produit scalaire est nul, ce qui montre l'orthogonalité des états de Bell.

3- Si on prend l'état β01 et qu'on mesure le premier qubit, la probabilité d'obtenir 0 est donnée par la valeur absolue du carré du coefficient de l'état qui correspond à |00⟩ (car si on mesure 0, alors le système est projeté sur l'état |00⟩). On a :

β01 = 1/√2 (|01⟩ + |10⟩) = 1/√2 |0⟩ (|1⟩ + |0⟩)

Le coefficient de |00⟩ est donc 1/√2, et la probabilité d'obtenir 0 est (1/√2)² = 1/2. Si on obtient effectivement 0, le système est projeté sur l'état |0⟩ (|1⟩ + |0⟩)/√2, et la probabilité d'obtenir 0 si on mesure le deuxième qubit est également 1/2.